Tartalomjegyzék

Feladatok

Elmélet : Középértéktételek és zárt iv-n ért folyt.

Fgv-ekre vonatkozó tételek

Taylor polinomok

Aszimptoták

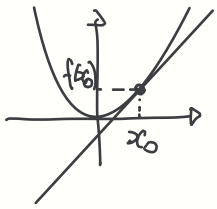
Fgv vizsgálat

Megoldások

(Fgv grafikonok)

FELADATOK

Érintőegyenes



Az érintőegyenes egyenlete:

$$(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0)$$

1. FELADAT (érintőegyenes)

a) Adjuk meg $f(x)=x^2$ parabola $(2,4)$ beli érintőjének egyenletét.

b) Adjuk meg a $g(x)=x^3$ fgv. azon pontjait és pontbeli érintőit, ahol az érintő párhuzamos az $y=12x+3$ egyenletű egyenessel.

c) az x^2 azon pontjait és pontbeli érintőit amik átmennek a $(0,-4)$ ponton.

Bolzano & Lagrange tételek:

2. FELADAT

a) Bolzano: Megoldható-e a valós számok halmazán?: $\sin(x)-x+1=0$

b) Bolzano: Ha f folyt $[0,1]$-en $\mathrm{Ran}(f) \subseteq [0,1] \Rightarrow \exists c \in [0,1]$, hogy $f(c)=c$.

c) Rolle: A $c_1+c_2x+\dots+c_nx^{n-1}=0$ egyenletnek van gyöke a $(0,1)$ ív-ban, ha $c_1+\frac{c_2}{2}+\dots+\frac{c_n}{n}=0$.

d) Lagrange: Biz be, hogy ha $x,y \in \mathbb{R}$

$$|\sin(x)-\sin(y)| \le |x-y|$$

e) Lagrange: Biz be, hogy ha $x,y>0$, $x \neq y$, akkor

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$$

Taylor polinom

3. Feladat Írjuk fel az x_0 körüli n-ed fokú Taylor polinomját.

Bemelegítő:

$a=0$, $n=4$ $f(x)=3x^4+x^2-7x+2$

A/ $f(x)=1/x$, $a=1$, $n=4$

B/ $g(x)=\ln(1+x)$, $a=0$, $n=4$

C/ $g(x)=\sin(x)$, $a=0$, $n=2$

D/ $g(x)=\cos(x)$, $a=\pi$, $n=4$

4. FELADAT (Hiba-tag)

A) $f(x)=\sin(x)$, $a=0$, $n=3$, $x_0=0.1$. Adjuk felső becslést a hibára.

B) Adjuk a $\sqrt{x}$ Taylor polinomjának segítségével $\leq 10^{-4}$ hibával becslést $\sqrt{0.9}$-re.

C) e $a=0$ körüli kpf. 10^{-4} hibával.

SZÉLSŐÉRTÉK KERESÉS 1.

5. FELADAT

Vizsgáljuk meg a szélsőértékeit és absz. szélsőértékeit a megadott intervallumon:

i) $f(x)=x^3+6x^2-15x+3$, $[-6,6]$ ii) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $[-1,8]$

iii) $f(x)=x\cdot e^{-x}$, $[\frac{1}{2},\infty)$ iv) $f(x)=x^3+6x^2-15x+3$, $(-6,6)$

6. FELADAT

Van-e szélsőértéke az $x=0$ pontban? Ha igen, akkor milyen

i) $f(x)=x^4$ ii) $f(x)=\mathrm{tg}(x)-x$ iii) $f(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos(x)$

FÜGGVÉNY VIZSGÁLAT + SZÉLSŐÉRTÉK KERESÉS 2.

7. FELADAT

Hol monoton? Hol konvex? Széls. ért? Hol van infl. pontja?

a) $f(x)=x+1/x$ b) $f(x)=x^3+3x^2$

c) $f(x)=x\cdot\ln(x)$ d) $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$

8. FELADAT

Aszimptoták.

a) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$

d) $f(x)=x+1/x$

9. FELADAT

Hol vannak f zérushelyei? Hol szigorúan monoton növő, illetve csökkenő a függvény? Hol vannak lokális szélsőértékei? Határozzuk meg hol konvex, illetve konkáv, hol vannak inflexiós helyei! Határozzuk meg az aszimptotáit majd vázoljuk a grafikonját!

a) $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$ b)

Rövid elméleti összefoglaló

Függvényvizsgálat – Elméleti bevezetés

1. Minimum & Maximum

Abszolút (Globális)

Def. Legyen f egy D halmazon értelmezett fgv.
f-nek a $c \in D$ pontban absz. minimuma/maximuma
van, ha $\forall x \in D$

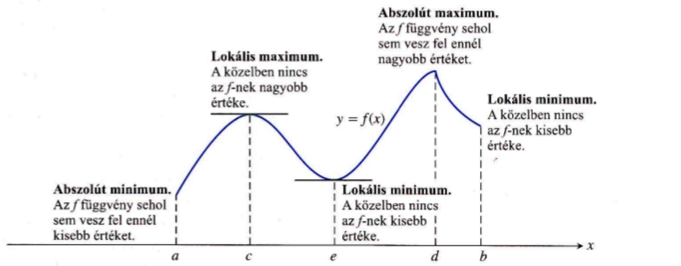
$$f(x) \leq f(c) \ / \ f(x) \geq f(c).$$

Tétel: Ha f folyt. az $[a,b]$ iv-n $\Rightarrow$ felveszi az
absz. minimumát és maximumát is.

Lokális

Def.: f értelmezési tartományának c belső pontjában
lok. min/lok. max., ha $\exists$ c-t tart. nyílt iv: (a,b)
$\forall x \in (a,b)$ $f(x) \geq f(c) \ / \ f(x) \leq f(c)$.

- Az iv. c végpontjában van, ha $\exists$ félig nyílt iv. amire a fenti áll.



4.5. ÁBRA: A maximumok és a minimumok osztályozása

← Thomas féle kalkulus.

Tétel. Ha lok. min. v. lok. max van az ért. tart
c belső pontjában $\Rightarrow f'(c) = 0$.

$\Downarrow$

Hol lehet szélsőérték (lokális/globális, minimum / maximum)?

a) Ahol $f' = 0$
b) Ahol f' nincs értelmezve $\Big\}$ kritikus pontok.
c) Az ért. tart határpontjaiban

② Monotonitás

<u>Def:</u> f (szigorúan) monoton növő / csökkenő az I intervallumon, ha

$$f(x_1) < f(x_2) \ \forall x_1 < x_2 \quad / \quad f(x_1) > f(x_2) \ \forall x_1 < x_2$$

<u>Tétel.</u> Ha f folyt. $[a,b]$-n és diffható (a,b)-n és

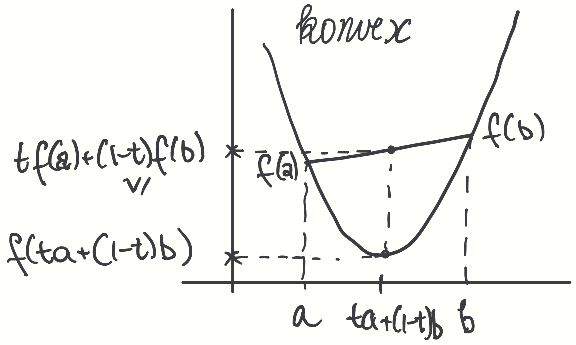
$$\begin{matrix} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{matrix} \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \text{ monoton } \begin{matrix} \text{növő} \\ \text{csökkenő} \end{matrix} \quad [a,b]\text{-n.}$$

II. szélsőértéktétel. Tfh c f krit. pontja, és f diffható c kis környezetében (kivéve talán c-t), ha

f' c-ben $-\,+$ vált $\rightarrow$ lok. min.
f' c-ben $+\,-$ vált $\rightarrow$ lok. max
f' c-ben nem vált $\rightarrow$ NINCS szélsőért.

③ Konvexitás.

konvex / konkáv az I intervallumon, ha $\forall\, a < b \in I$



$$f(ta+(1-t)b) \le t \cdot f(a) + (1-t) f(b) \ /$$

$$f(ta+(1-t)b) \ge t \cdot f(a) + (1-t) f(b)$$

<u>Tétel:</u> Ha f diffható az I nyílt intervallumon
ha f' növekszik I-n $\Rightarrow f$ konvex
ha f' csökken I-n $\Rightarrow f$ konkáv

<u>Tétel:</u> Ha f 2x diffható az I nyílt intervallumon
ha $f'' > 0$ I-n konvex
$f'' < 0$ I-n konkáv.

<u>Def:</u> <u>inflexiós pont:</u> Ahol diffható és a fgv. konvexitást vált.

Aszimptoták

függőleges: az $x = x_0$, ha $\lim\limits_{x \to x_0 \pm} f(x)$

ferde: az $mx + c$ egyenletű egyenes, ha

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad c = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$$

v.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad c = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$$

spec., ha $m = 0 \Rightarrow$ vízszintes aszimptota

Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal: Tegyük fel, hogy $f(x)$ az a és b között $(n+1)$-szer differenciálható és $f^{(n)}(x)$ a zárt számközben folytonos. Ekkor létezik egy c az a és b között, amelyre

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Ha

$$T_{f,n}(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n,$$

akkor

$$f(b) = T_{f,n}(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Ennek egyszerű következménye:

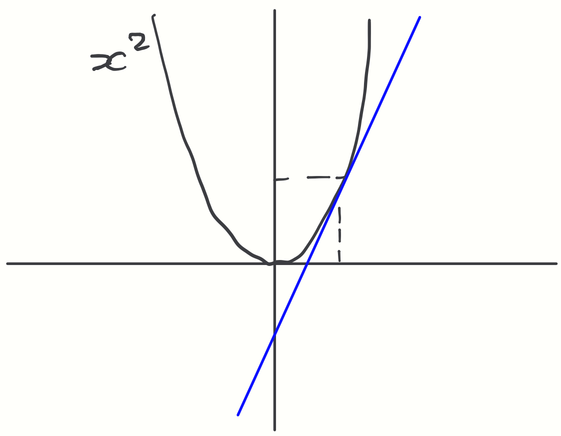
$$|f(b) - T_{f,n}(b)| \le \max_x \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \right|,$$

ahol a maximumot az a és b közötti x-ek esetén vesszük.

MEGOLDÁSOK:

1. FELADAT (érintőegyenes)

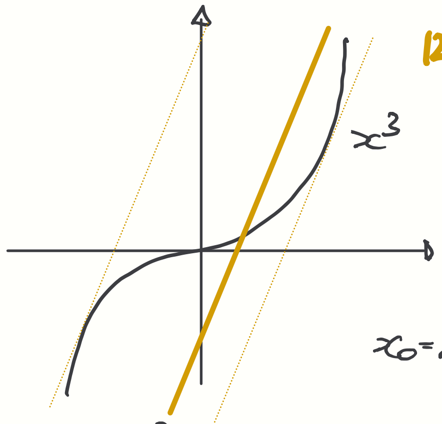
a) Adjuk meg $f(x) = x^2$ parabola $(2,4)$ beli érintőjének egyenletét.



Mivel $x_0 = 2$, $f(x_0) = 4$, $f'(x_0) = 2x_0 = 4$ a képletbe $(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0))$ helyettesítve:

$$y - 4 = 4(x-2)$$

b) Adjuk meg a $g(x) = x^3$ fgv. azon pontjait és pontbeli érintőit, ahol az érintő párhuzamos az $y = 12x + 3$ egyenletű egyenessel.



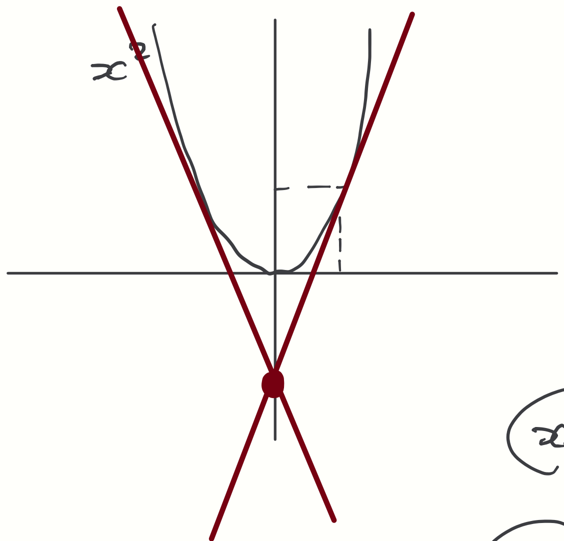
$12x + 3 = y$ párhuzamos, ahol a meredekség megegyezik vis

$$3x_0^2 = f'(x_0) = 12 \Rightarrow x_0 = \pm 2$$

az érintő

$x_0 = 2$ $\quad y - 2 = 12(x-2)$ és $x_0 = -2$ $\quad y + 2 = 12(x+2)$

c) az x^2 azon pontjait és pontbeli érintőit amik átmennek a $(0,-4)$ ponton.



Keressük az x_0 pontot, hogy az (x,y) pont kielégíti az egyenletet $\underset{(0,-4)}{\overset{\shortparallel}{}}$

$(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0))$

$$-4 - x_0^2 = 2x_0(0 - x_0) = -2x_0^2$$

$$x_0^2 = 4 \Rightarrow x_0 = \pm 2$$

$x_0 = 2$

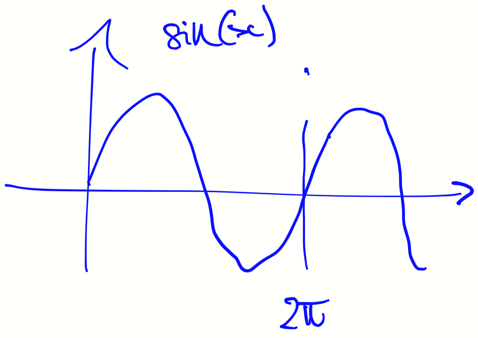
$$y - 4 = 4(x-2)$$

$x_0 = -2$ $\quad y - 4 = -4(x+2)$

2. FELADAT

a) Bolzano: Megoldható-e a valós számok halmazán?: $\sin(x) - x + 1 = 0$

Legyen! $f(x) = \sin(x) - x + 1 \Rightarrow f(0) = 1$, $f(2\pi) = -2\pi + 1 < 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ van gyök a Bolzano tétel miatt.



b) Bolzano: Ha f folyt $[0,1]$-en $Ran(f) \subseteq [0,1] \Rightarrow \exists c \in [0,1]$, hogy $f(c) = c$.

$g(x) = f(c) - c$ ha $f(0) = 0$ v. $f(1) = 1$ akkor kész vagyunk.

ha nem akkor mivel $Ran(f) \subseteq [0,1]$ $g(0) = f(0) > 0$ és $g(1) = f(1) - 1 < 0$ mivel $f(1) < 1$.

$\Rightarrow$ A Bolzano tétel alapján $\exists c \in (0,1)$, hogy $g(c) = 0 = f(c) - c$
$\Downarrow$
$f(c) = c$

c) Rolle: A $c_1 + c_2 x + \dots + c_n x^{n-1} = 0$ egyenletnek van gyöke a $(0,1)$ int-ban ha $c_1 + \frac{c_2}{2} + \dots + \frac{c_n}{n} = 0$.

d) Lagrange: Biz be, hogy ha $x, y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$|\sin(x) - \sin(y)| \le |x - y|$$

A Lagrange tételt alkalmazva a $x \to \sin(x)$ fgv-re az $[x,y]$ int-on $\exists c$

$$\frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} = \sin'(c) = \cos(c)$$

mivel $-1 \le \cos(c) \le 1$

$$\frac{|\sin(x) - \sin(y)|}{|x - y|} \le 1$$

e) Lagrange: Biz be, hogy ha $x, y > 0$, $x \ne y$, akkor

$$* \quad \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$$

Gombos Gergely: csak emeljük 2-re

$* \Leftrightarrow 4xy \le x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow 0 \le (x-y)^2$ ✓

Lagrange: $\sqrt{x}$-re: $\exists c \in (x,y)$

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \le \frac{1}{2\sqrt{c}} \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\Rightarrow x - \sqrt{xy} \le \frac{x-y}{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \le \sqrt{xy}$ átrendezve

3. Taylor

BEMELEGÍTŐ:

$x_0 = 0,\ n = 4 \quad f(x) = 3x^4 + x^2 - 7x + 2$

Megoldás:

BEMELEGÍTŐ: Sajnos magam, de ellenőrizzük:

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)/k!$
$k=0$	$3x^4+x^2-7x+2$	$2/0! = 2$
1	$12x^3+2x-7$	$-7/1! = -7$
2	$36x^2+2$	$2/2! = 1$
3	$72x$	$0/3! = 0$
4	72	$72/4! = 3$

A Taylor polinom:

$$2\cdot(x-0)^0 - 7(x-0)^1 + (x-0)^2 + 0\,(x-0)^3 + 3(x-0)^4$$

$$\| $$

$$\boxed{3x^4 + x^2 - 7x + 2}$$

A/ $f(x) = 1/x,\ x_0 = 1,\ n = 4$

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(1)/k!$
$k=0$	$1/x$	1
1	$-1/x^2$	-1
2	$\frac{2}{x^3}$	$2/2! = 1$
3	$-6/x^4$	$-6/3! = -1$
4	$\frac{24}{x^5}$	$24/4! = 1$

$$T_{1/x,4}(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4$$

Megj.: végtelen geom. sorösszegképlete

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{1+(x-1)} = \frac{1}{x},$$

ha $|x-1| < 1$

B/ $g(x) = \ln(1+x),\ x_0 = 0,\ n = 4$

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)/k!$
$k=0$	$\ln(1+x)$	0
1	$\frac{1}{1+x}$	$1/1!$
2	$-\frac{1}{(1+x)^2}$	$-1/2! = -1/2$
3	$\frac{2}{(1+x)^3}$	$\frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$
4	$\frac{6}{(1+x)^4}$	$6/4! = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow T_{\ln(1+x),4}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

C/ $f(x)=\sin(x),\ x_0=0,\ n=2$

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)/k!$
$k=0$	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	$-1/3!$
4	$\sin(x)$	0

$$T_{\sin,4}(x) = x - x^3/3!$$

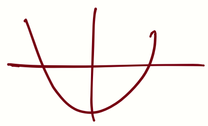
D/ $f(x)=\cos(x),\ x_0=\pi,\ n=4$

	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(\pi)/k!$
$k=0$	$\cos(x)$	-1
1	$-\sin(x)$	0
2	$-\cos(x)$	$1/2$
3	$\sin(x)$	0
4	$\cos(x)$	$-1/4!$

$$T^{\pi}_{\cos,4}(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{4!}$$

5. FELADAT

Vizsgáljuk meg a szélsőértékeit és absz. szélsőértékeit a megadott intervallumon:



i) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$, $[-6,6]$

Tudjuk, hogy van absz. min & absz. max (Weierstrass tétel), hol lehet?

(i) $f'=0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2+12x-15=0$, ha $x=1$ v. $x=-5$ $\quad f(1)=-5,\ f(-5)=103$

(ii) f' nem létezik $\Rightarrow$ ilyen nincs

(iii) határpontokban $\Rightarrow f(-6)=93,\ f(6)=345$

	-6		-5		1		6
	93		103		-5		345
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

$\Rightarrow$
- -6 lok min., mert $[-6,-5]$-ön f mon. növő
- -5 lok max, mert -5-ben mon növőből mon. csökkenőbe vált
- 1 glob min, mert lok min és $f(-1) < f(-6)$ és $\exists$ glob min
- 6 glob max, mert lok. max és $f(6) > f(-5)$ és $\exists$ glob max

ii) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $[-1,8]$

a) $f'=0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^{-1/3}=0$, ilyen pont nincs

b) f' nem létezik $\Leftrightarrow x=0$ $\quad f(0)=0$

c) határpontok : $f(-1)=1,\ f(8)=4$

$\Rightarrow$

	-1		0		8
$f(x)$	1		0		4
$f'(x)$	$-$	$-$	$\emptyset$	$+$	$+$

- -1-ben lok max
- $\Rightarrow$ 8-ban glob.max
- 0-ban glob. min

ii) $f(x)=x^3+7 \quad [-2,1]$

a) $f'=0 \Leftrightarrow 3x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

b) f' nem létezik – nincs ilyen

c) határpontokban $f(-2)=-1$, $f(1)=8$

	-2		0		1
$f(x)$	-1		7		8
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$+$

-2 lok min & absz min

1 lok és glob max

iii) $f(x)=x\cdot e^{-x}, \quad [\frac{1}{2},\infty)$

a) $f'=0$, $f'(x)=e^{-x}-x\cdot e^{-x}=e^{-x}(1-x)=0$, ha $x=1$

b) f' nem létezik $\Rightarrow$ nincs

c) határpont $\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ $\quad f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^{1/2}}$

	$\frac{1}{2}$		1	
$f(x)$	$\frac{1}{2}e^{-1/2}$		$1/e$	
$f'(x)$	$+$ $+$	$+$	0	$-$
	lok min.		glob.max	

$\Rightarrow \frac{1}{2}$ lok. min, mert $(\frac{1}{2},1)$-en a fgv. nem nővő

$\Rightarrow$ 1-ben glob. max, mert tőle balra mon. nővő tőle jobbra mon. csökk a fgv.

Nincs glob. min

iv.) $f(x)=x^3+6x^2-15x+3$, $(-6,6)$

Hasonlóan (ii)-hez, de nincs glob max 6-ban és lok min -6-ban.

6. FELADAT

Van-e szélsőértéke az $x=0$ pontban? Ha igen, akkor milyen?

i) $f(x)=x^4$

	$x=0$
$f'(x)=4x^3$	0
$f''(x)=12x^2$	0
$f'''(x)=24x$	0
$f^{(4)}(x)=24$	$24>0$

$\Rightarrow$ 4 páros, $24>0$ lokális minimum

ii) $f(x)=tg(x)-x$

	$x=0$
$f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}-1$	0
$f^{(2)}(x)=\frac{-2\sin(x)}{\cos^3(x)}$	0
$f^{(3)}(x)=\frac{-2\cos^4(x)-2\sin^2(x)3\cos^2(x)}{\cos^6(x)}$	-2

$\Rightarrow$ 3 ptlan $\Rightarrow$ nincs lok. min max

iii) $f(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos(x)$

...

7. FELADAT Hol monoton? Hol konvex? Széls. ért? Hol van infl. pontja?

a) $f(x) = x + 1/x$

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = 1 - 1/x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$f''(x) = \dfrac{2}{x^3} \neq 0$

$|x| < 1 \quad \dfrac{1}{x^2} > 1$

	$-\infty$	-1		0		1	∞
$f(x)$	↑ ∩	-2	↓ ∩	∅	↓ ∪	2	↑ ∪
$f'(x)$	+ +	0	−	∅	−	0	+ + +
$f''(x)$	− −	−	−	∅	+	+	+ +
		lok. max				lok. min	

B) $f(x) = x^3 + 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$ gyökök: $x_0 = 0,\ x_1 = -2$

$f''(x) = 6x + 6$, gyökök: $x_3 = -1$

	$-\infty$	-2		-1		0	∞
$f(x)$	↗ ∩ ↗		∩ ↓		↓		↑ ∪
$f'(x)$	+ + +	0	−	−	−	0	+ + +
$f''(x)$	− − −		−	0		+	+ + −
		lok max				lok min	

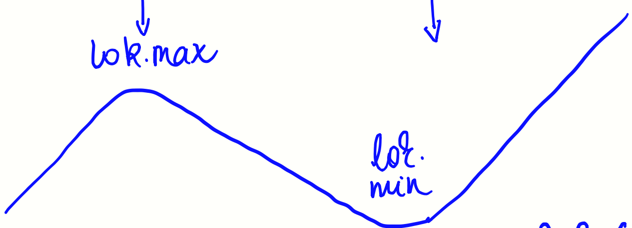
c) $f(x) = x \cdot \ln^2(x)$

$\mathrm{Dom}\, f = (0, \infty)$

$f'(x) = \ln^2(x) + x \cdot 2\ln(x) \cdot 1/x = \ln(x)(\ln(x)+2) = 0$, ha $x = 1$,
ha $x = 1/e^2$

$f''(x) = 1/x\,(\ln(x)+2) + \ln(x)\, 1/x = 2/x\,(\ln(x)+1) = 0$, ha $\ln(x) = -1$
$x = 1/e$

	0	$1/e^2$		$1/e$		1	∞
$f(x)$	∩ ↑	∩	∩ ↓	i.p.	↓ ∪		∪ ↑ ∪ ∪
$f'(x)$	+ +	0	− −	−	−	0	+ + + +
$f''(x)$	− −		− −	0	+ +	+	+ + + +
		lok. max					



↳ ez globális, mert $f(1) = 0$, amúgy $f(x) > 0$

d) $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$

$f'(x) = e^{-x^2} - x \cdot e^{-x^2} \cdot 2x = e^{-x^2}(1-2x^2)$

$f''(x) =$

8. FELADAT Aszimptoták.

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \mathrm{Dom}\, f = (-1,1)$

Függőleges lehet az $x_0=-1, x_0=1$ pontokban.

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+} \dfrac{x}{|x|} \dfrac{1}{\sqrt{1/x^2 - 1}} = \lim\limits_{x\to -1+} \dfrac{-1}{\underbrace{\sqrt{1/x^2-1}}_{\to 0+}} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{1}{\sqrt{1/x^2-1}} = \infty$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ $\quad (\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\})$

Függőleges aszimptota lehet az $x=0$ pontban

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \infty$ $\quad$ 0-ban függőleges aszimptota.

$\left(\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty\right)$

Ferde / vízszintes?

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|x|}{x^2} \sqrt{1+1/x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{|x| \sqrt{1+1/x^2}}{x^2} = 0 \end{array}\right\}$ vízszintes!

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|x|}{x} \sqrt{1+1/x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{|x|}{x} \sqrt{1+1/x^2} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ ∞-ben az $y=1$, $-\infty$-ben az $y=-1$ egyenes vízszintes a.

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$

$x=0$-ban lehet függőleges aszimptota.

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \infty$ tdm tdm, teljesül

Ferde?:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x\cdot|x|} \sqrt{1+\frac{1}{4x^4}} = 2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-2x = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^4+1-4x^4}{|x|\left(\sqrt{4x^4+1}+\sqrt{4x^4}\right)} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x\cdot|x|} \sqrt{1+\frac{1}{4x^4}} = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+2x = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^4+1}+2|x|x}{|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^4+1}-\sqrt{2|x|^4}}{|x|\left(\sqrt{4x^4+1}+\sqrt{4x^4}\right)} = \dots\ 0$$

Tehát 0-ban függőleges aszimptotát, ∞-ben az $y=2x+0$ és $-\infty$-ben az $y=-2x+0$ egyenesek.

d) $f(x) = x + 1/x$

$x = 0$ -ban függőleges:

$\lim\limits_{x \to 0+} x + 1/x = \infty$ $\lim\limits_{x \to 0-} x + 1/x = -\infty$

ferde?

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} 1 + 1/x^2 = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to \infty} 1/x = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = 0$

tehát 0-ban függőleges &

∞-ben ill. $-\infty$-ben is az $y = x$ egyenes.

9. FELADAT

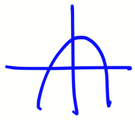
Hol vannak f zérushelyei? Hol szigorúan monoton növő, illetve csökkenő a függvény? Hol vannak lokális szélsőértékei? Határozzuk meg hol konvex, illetve konkáv, hol vannak inflexiós helyei! Határozzuk meg az aszimptotáit majd vázoljuk a grafikonját!

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2}$$

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$, és itt mindenhol folytonos és $2\times$ diffható

zérushelyek: $f(x)=0 \Leftrightarrow \underline{x=0}$ v. $e^{-x^2}=0$ ($\leftarrow$ ez nem lehet)

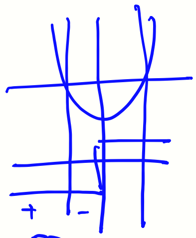
$$f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$$



zh: $x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

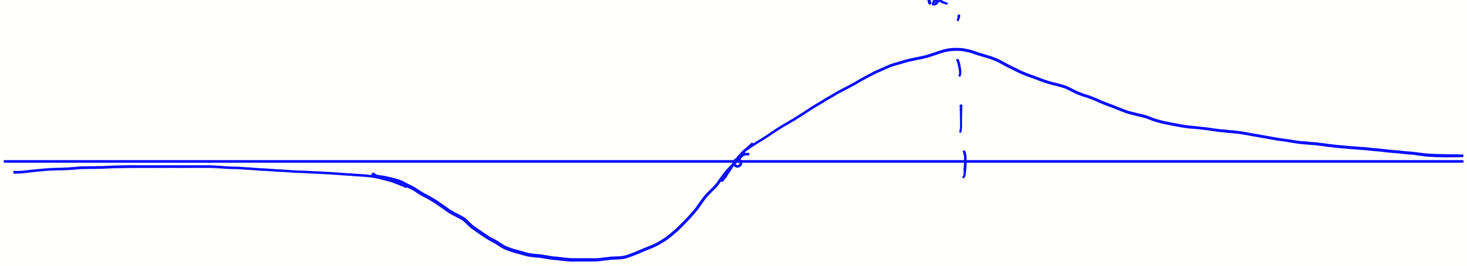
$$f''(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)(1-2x^2) + e^{-x^2}(-4x) =$$

$$= e^{-x^2}(-2x + 4x^3 - 4x) = e^{-x^2}(2x^3 - 3x)2 = \underset{\substack{\vee \\ 0}}{e^{-x^2}} \cdot x(2x^2-3)$$



$f''(x) = 0$ ha
1. $x = 0$
2. $\pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$+\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$		∞
$f(x)$	$0 \leftarrow$	$\downarrow \cap$		$\downarrow \cup$		$\uparrow \cup$		$\uparrow \cap$		$\downarrow \cap$		$\downarrow \cup$	$\rightarrow 0$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
			INFL PONT		LOK MIN		INFL PONT		LOK MAX		INFL PONT		

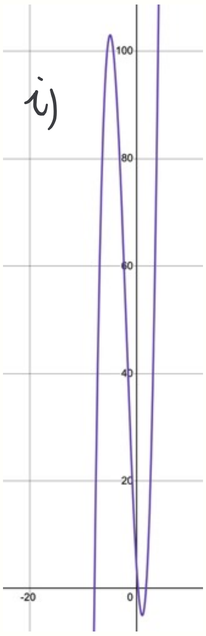


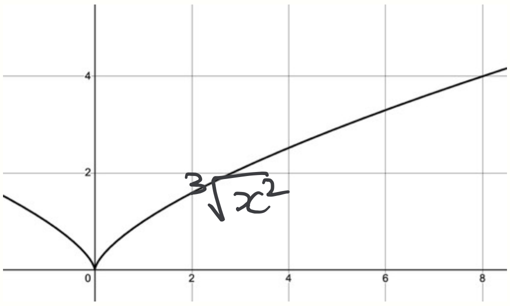
Aszimptoták → Függőleges: nincs

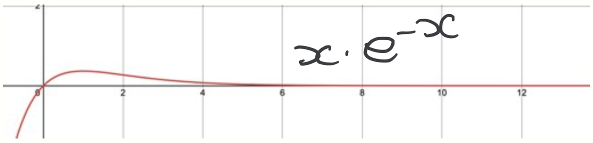
→ FERDE: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$

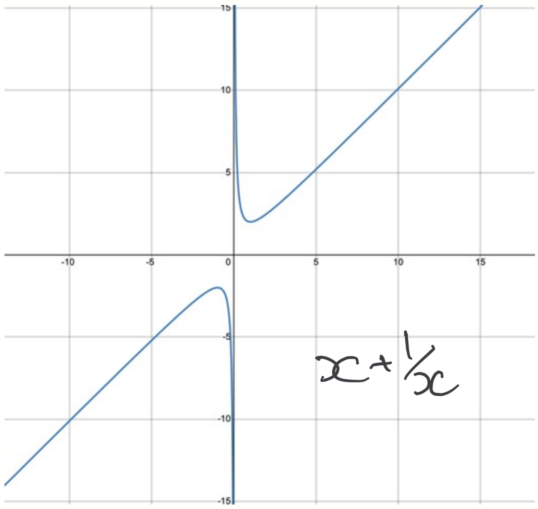
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ldots = 0$

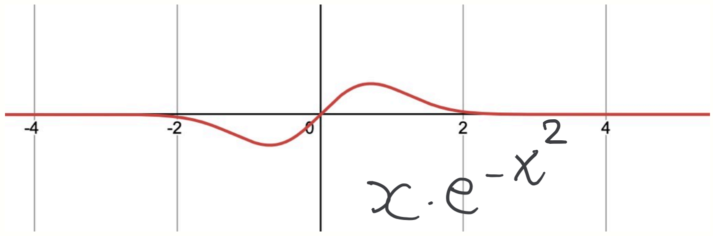
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot e^{-x^2} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} x \cdot e^{-x^2}$

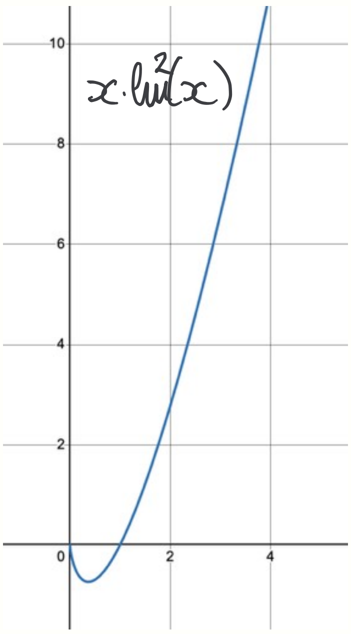

i)

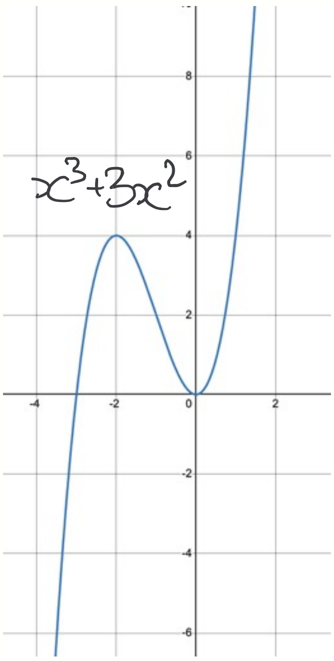

$\sqrt[3]{x^2}$

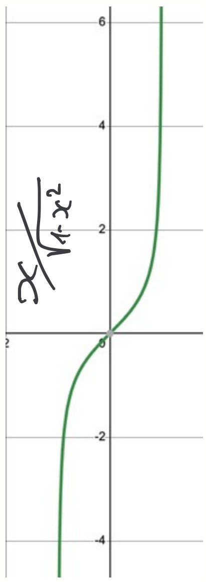

$x \cdot e^{-x}$

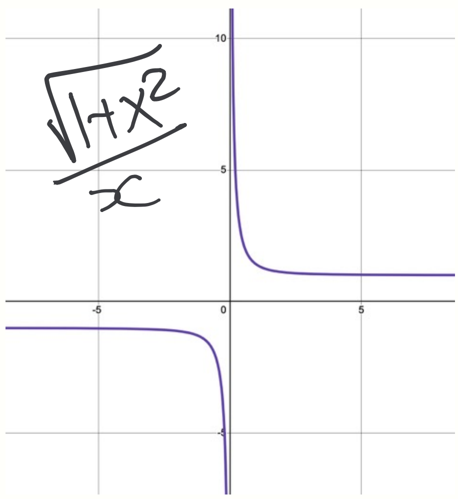

$x + 1/x$

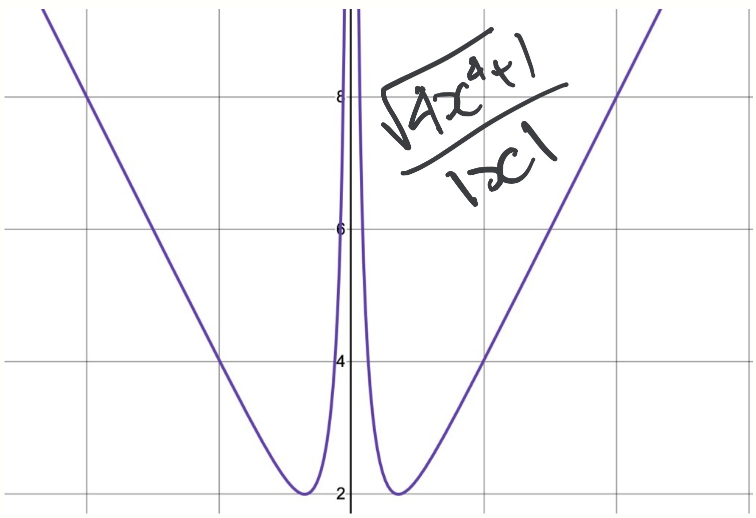

$x \cdot e^{-x^2}$


$x \cdot \ln^2(x)$


x^3+3x^2


$x/\sqrt{1-x^2}$


$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$


$\frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$