4. GYAKORLAT

Def. • $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton nő / csökken, ha $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_{n+1}\geq a_n$. / $a_{n+1}\leq a_n$.

• $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alulról / felülről korlátos, ha $\exists c\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n\geq c$. / $a_n\leq c$.

1. Feladat: Monoton, Korlátos? $n=1,2,3,\dots$

a) $a_n=1/n$ b) $b_n=\frac{2n+7}{3n-2}$ c) $c_n=\frac{n}{n^2+1}$ d) $d_n=\frac{n^2+(-1)^n}{2n^2+1}$

küszöbindex

Def. • $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértéke az A szám, ha $\forall\varepsilon\ \exists N_0\ \forall n>N_0$ $|a_n-A|<\varepsilon$.

• Ha $\exists A$ szám ami $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértéke, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens. Ekkor $A=\lim_{n\to\infty}a_n$.

Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergens $\longrightarrow$ divergens.

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n$;
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$;
3. Ha $\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$, akkor $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}$;
4. Ha $k>0$, és minden n-re $a_n>0$, akkor $\lim_{n\to\infty}(a_n)^k=(\lim_{n\to\infty}a_n)^k$;
5. Ha $|q|<1$, akkor $\lim_{n\to\infty}q^n=0$;
6. Ha $k>0$, akkor $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$.

2. feladat Számítsuk ki a h.é.-t.

a) $a_n=\frac{36n-7}{5-2n}$ b) $b_n=\frac{n^2-7n+3}{3n^2+8n-7}$ c) $c_n=\frac{\sqrt{n^2+9}}{3n+2}$ d) $d_n=\frac{2^{2n}+3^{n+9}}{2^n+4^{n+7}}$

e) $e_n=\left(\frac{2n+1}{3-n}\right)^3\frac{3n^2+2n}{2+6n^2}$

3. feladat Számoljuk ki, hogy mi lehet egy jó küszöbindex.

i.e. mi lesz N_0 egy adott ε-ra

a) $a_n=\frac{3n+1}{4n-1}$, $\varepsilon=\frac{1}{100}$.

Erősorrend & Polinomok n. gyöke

• $\log n\ll n\ll n^2\ll n^3\ll\dots\ll 2^n\ll 3^n\ll\dots\ll n!\ll n^n$ $\quad a_n\ll b_n\iff\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$

• ha $c>0$ $\sqrt[n]{c}\xrightarrow[\infty]{n}1$ illetve $\sqrt[n]{n}\xrightarrow[\infty]{n}1$

4. feladat rendőrelv.

a) $a_n=\frac{2^{3n}+6^n}{n!+12}$ b) $b_n=\frac{3^{2n}-n^5\cdot\sin(n)}{3n^7+9^{n+1}+8^n+\cos^2(n)}$ c) $c_n=\sqrt[3n]{n}$

d) $d_n=\sqrt[n]{5n^2}$

Megoldások

a) $a_n = 1/n$,

monotonitás:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
1	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$\downarrow$

látszólag mon. csökk.

$$a_n \ge a_{n+1} \iff 1/n \ge 1/(n+1) \overset{n\ge 1}{\iff} n+1 \ge n \text{ , ami igaz}$$

korlátosság:

1. mivel $n \ge 1$ $\quad 1/n \ge 0$
2. mivel a_n mon csökk $a_n \le a_1 = 1$

b) $b_n = \dfrac{2n+7}{3n-2}$

b_1	b_2	b_3	
$9/1$	$\frac{11}{4} = \frac{22}{8}$	$\frac{13}{7}$	$\downarrow$

monotonitás:

látszólag mon. csökk.

mon. csökk. $\iff a_{n+1} \le a_n \iff a_{n+1} - a_n \le 0 \iff \dfrac{2(n+1)+7}{3(n+1)-2} - \dfrac{2n+7}{3n-2} \le 0 \iff$

$$\frac{2n+9}{3n+1} - \frac{2n+7}{3n-2} \le 0 \iff \frac{(2n+9)(3n-2)-(3n+1)(2n+7)}{(3n+1)(3n-2)} \le 0$$

$$\frac{(2n+9)(3n-2)-(3n+1)(2n+7)}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{\cancel{6n^2} + \cancel{27n} - \cancel{4n} - 18 - (\cancel{6n^2} + \cancel{2n} + \cancel{21n} + 7)}{9n^2+3n-6n-2} =$$

$$= \frac{-25}{9n^2-3n-2} \text{ , ez valóban } \le 0 \text{, mert } 9n^2-3n-2 \ge 0$$

c) és d) megtalálható https://ovilma.pages.dev/notes/sorozatok.pdf 1/b,c feladata.

2. FELADAT

a) $a_n = \dfrac{36n-7}{5-2n}$ b) $b_n = \dfrac{n^2-7n+3}{3n^2+8n-7}$ c) $c_n = \dfrac{\sqrt{n^2+9}}{3n+2}$ d) $d_n = \dfrac{2^{2n}+3^{n+9}}{2^n+4^{n+7}}$

e) $e_n = \left(\dfrac{2n+1}{3-n}\right)^3 \dfrac{3n^2+2n}{2+6n^2}$

a) $a_n = \dfrac{36n-7}{5-2n}$

a számlálóból és a nevezőből is kiemeljük n-t.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{36n-7}{5-2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{36-\frac{7}{n}}{\frac{5}{n}-2} = \frac{36}{2} = 18$$

mivel: $\frac{7}{n} \to 0$, $\frac{5}{n} \to 0$, tehát a számláló tart 36-ba a ★1. miatt, a nevező pedig 2-be ugyanígy.

★3-ból kapjuk a határértéket.

b) a)-hoz hasonló érveléssel: ($+\frac{a}{n^2} \to 0$, $a \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-7n+3}{3n^2+8n-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\overset{\to 0}{\frac{7}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{3}{n^2}}}{3+\underset{\downarrow 0}{\frac{8}{n}}-\underset{\downarrow 0}{\frac{7}{n^2}}} = \frac{1}{3}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+9}}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}}{n\cdot\left(3+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}}{(3+2/n)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{9}{n^2}} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{n^2}\right)} = \sqrt{1} = 1$$

★4, $k = \frac{1}{2}$

d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}+3^{n+9}}{2^n+4^{n+7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n+3^9\cdot 3^n}{2^n+4^7\cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\left[1+3^9\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}{4^n\left[\left(\frac{2}{4}\right)^n+4^7\cdot 1\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3^9\left(\frac{3}{4}\right)^n}{4^7+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$\parallel$ ✿

★5-ből: $\left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ így $3^9\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$ & $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, tehát

✿ $= \frac{1}{4^7}$

e) $e_n = \underbrace{\left(\frac{2n+1}{3-n}\right)^3}_{f_n} \underbrace{\frac{3n^2+2n}{2+6n^2}}_{g_n}$

★ 2-ből: $\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} f_n \cdot \lim_{n\to\infty} g_n$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3-n}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3-n}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n}{3/n-1}\right)^3 =$$

$$= (-2)^3 = -8$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n}{2+6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2/n}{2/n^2+6} = \frac{1}{2}$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} e_n = -8/2 = -4$$

3. FELADAT

lsd. https://ovilma.pages.dev/notes/sorozatok.pdf → 3. Küszöbindex keresés / a

4. FELADAT

a) $a_n = \dfrac{2^{3n}+6^n}{n!+12}$

b) $b_n = \dfrac{3^{2n}-n^5 \cdot \sin(n)}{3n^7+9^{n+1}+8^n+\cos^2(n)}$

c) $c_n = \sqrt[3n]{n}$

d) $d_n = \sqrt[n]{5n^2}$

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n}+6^n}{n!+12} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n}/n! + 6^n/n!}{1+12/n!} = 0, \text{ mivel}$$

$$2^{3n}/n! \to 0 \ \& \ 6^n/n! \to 0$$

b) $b_n = \dfrac{3^{2n} - n^5 \cdot \sin(n)}{3n^7 + 9^{n+1} + 8^n + \cos^2(n)} \doteq \dfrac{9^n - n^5 \cdot \sin(n)}{3n^7 + 9 \cdot 9^n + 8^n + \cos^2(n)}$

1. megoldás: [rendőrelv]

mivel $-1 \le \sin(n) \le 1$, $0 \le \cos^2(n) \le 1$, ezért $\quad 3^{2n} - n^5 \le 3^{2n} - n^5 \sin(n) \le 3^{2n} + n^5 \quad (n \ge 1)$

és

$$3n^7 + 9^{n+1} + 8^n \le 3n^7 + 9^{n+1} + 8^n + \cos^2(n) \le 3n^7 + 9^{n+1} + 8^n + 1$$

tehát

$$\frac{3^{2n} - n^5}{3n^7 + 9^{n+1} + 8^n + 1} \le \frac{3^{2n} - n^5 \cdot \sin(n)}{3n^7 + 9^{n+1} + 8^n + \cos^2(n)} \le \frac{3^{2n} + n^5}{3n^7 + 9^{n+1} + 8^n}$$

$$\frac{3^{2n} - n^5}{3n^7 + 9^{n+1} + 8^n + 1} = \frac{9^n}{9^n} \cdot \frac{1 - n^5/9^n}{3 n^7/9^n + 9 \cdot 1 + (8/9)^n + 1/9^n} \xrightarrow{n \to \infty} 1/9$$

$$\frac{3^{2n} + n^5}{3n^7 + 9^{n+1} + 8^n} = \frac{9^n}{9^n} \cdot \frac{1 + n^5/9^n}{3 n^7/9^n + 9 \cdot 1 + (8/9)^n} \xrightarrow{n \to \infty} 1/9$$

2. megoldás $\quad$ lemma: ha a_n korlátos sorozat és $b_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$, akkor $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

sin korlátos
$n^5/9^n \to 0$
$\to 0$ lemma miatt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^{2n} - n^5 \cdot \sin(n)}{3n^7 + 9^{n+1} + 8^n + \cos^2(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{9^n}{9^n} \cdot \frac{1 - \frac{n^5}{9^n} \cdot \sin(n)}{\underbrace{3n^7/9^n}_{\to 0} + 9 \cdot 1 + \underbrace{(8/9)^n}_{\to 0} + \underbrace{\cos^2(n) \cdot 1/9^n}_{\to 0}} =$$

lemma
$1/9^n \to 0$
$\cos^2(n)$ korlátos

$= 1/9$

c) $$\sqrt[n]{3n} = \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\substack{\downarrow\, n\to\infty \\ 1}} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\substack{\downarrow\, n\to\infty \\ 1}} \xrightarrow[\star 2]{n\to\infty} 1$$

✿$_1$ & ✿$_2$ miatt

VAGY

$$\sqrt[n]{3n} =$$

d) $d_n = \sqrt[n]{5n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{5}}_{\substack{\downarrow \\ 1 \\ ✿_1}} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\substack{\downarrow \\ 1 \\ ✿_2}} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\substack{\downarrow \\ 1 \\ ✿_2}} = 1$$

szorzatszabály: $\star$ 2