5. GYAKORLAT (SOROZATOK FOLYT, FGV-K HATÁRÉRTÉKEI, FOLYTONOSSÁG)

4. FELADAT (FOLYTATÁS)

d) $d_n = \sqrt[n]{5n^2}$ e) $e_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^n+5^n}{2^n+4^n}}$ f) $f_n = \dfrac{3n^5+n^2-n}{n^3+3}$

EML.: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

[megj: tfh. $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$, $r \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{a_n}\right)^{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{b_n}\right)^{b_n} = e^r$]

5. FELADAT

Mi a határérték?

bem. $a_n = \left(1+\frac{1}{5\cdot n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{5\cdot n}\right)^{5\cdot n}\right)^{1/5} \to e^{1/5}$

a) $a_n = \left(1+\frac{9}{n}\right)^n$ b) $b_n = \left(1+\frac{7}{n}\right)^{3n+8}$ c) $c_n = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{2n+7}$ d) $d_n = \left(\frac{3n+4}{3n+8}\right)^{9n+7}$

6. FELADAT

a) $a_n = \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+n}$ b) $b_n = \sqrt{n^2+5n+1} - n$

FGV-K HATÁRÉRTÉKEI:

def. 1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, ha
- értelmezve van x_0 vmely E környezetében
- ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$ esetben, ha $x_n \xrightarrow[\infty]{n} x_0$, akkor $f(x_n) \xrightarrow[\infty]{n} A$.

def. 2 VAGY

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x$, melyre $|x-x_0| < \delta$-ra f értelmezve van x-ben és $|f(x)-A| < \varepsilon$.

TULAJDONSÁGOK.

$\to \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

$\to \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

$\to \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0\right)$

Pl. $\lim\limits_{x\to x_0} x^7 = \left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)^7 = x_0^7$

7. FELADAT

Ha kell, egyszerűsítsünk le $(x-x_0)$ vmely hatványával, hogy megkapjuk a h.é-t.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1} = ?$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1} = ?$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^p-1}{x^q-1} = ?$ $p, q \in \mathbb{N}^+$

7,5. FELADAT

Azonosságot használva:

d) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{\sin^3(x)}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos(x))^2}{\operatorname{tg}^2(x) - \sin^2(x)}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

JOBB & BAL H.E.!

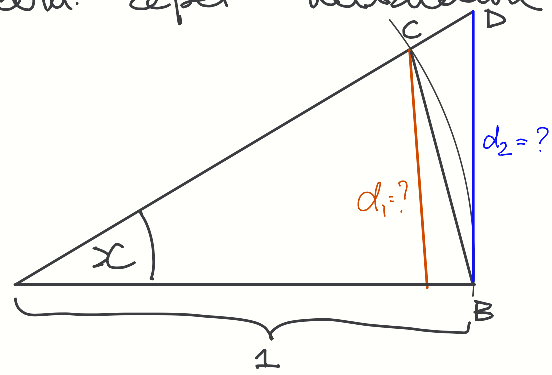
def.

- Az $f(x)$ fgv. JOBBoldali határértéke x_0-ban az A szám, ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$ hogy $\forall x_0 < x < x_0 + \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.
- Az $f(x)$ fgv. BALoldali határértéke x_0-ban a B szám, ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$ hogy $\forall x_0 - \delta < x < x_0$, akkor $|f(x) - B| < \varepsilon$.

Jelölés JOBB: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$

BAL: $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$

★-os feladat: lássuk be, hogy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ az alábbi geom. képet használva



$T(\Delta ABC) = ?$ $T(◁ABC) = ?$ $T(\Delta ABD) = ?$

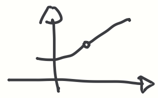
FGV-EK FOLYTONOSSÁGA

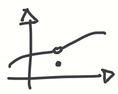
def. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, ha f értelmezve van x_0 pontban és $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- Ha f folytonos x_0 egy környezetében, de x_0-ban nem, akkor f-nek x_0-ban szakadása van.

Típusok:

① MEGSZÜNTETHETŐ



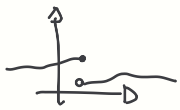


$f(x_0)$ nem def v. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$)

② UGRÁS

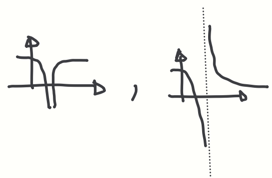
$\exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$

de $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$



③ MÁSODFAJÚ

$\nexists \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ v. $\nexists \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$



8. FELADAT

Hol folytonos? Hol milyen szakadása van?

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 6}$

a+ε) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{|x+3|}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 (x-3)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 7}$

d) $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{1 - \cos(x)}$

9. FELADAT

Tegyük folytonossá a param. jó megválasztásával.

a) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(x) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ x^2 + ax + b, & 1 < |x| \end{cases}$

Megoldások:

4. FELADAT

d) $d_n = \sqrt[n]{5n^2} = \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{5}}\ \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{n}}\ \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{n}}$

e) $e_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^n + 5^n}{2^n + 4^n}}$

$$\frac{5}{4} \leftarrow \frac{1}{\underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{2}}}\cdot\frac{5}{4} = \frac{\sqrt[n]{5^n}}{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{4^n}} = \frac{\sqrt[n]{5^n}}{\sqrt[n]{2\cdot 4^n}} \le \sqrt[n]{\frac{3^n+5^n}{2^n+4^n}} \le \frac{\sqrt[n]{2\cdot 5^n}}{\sqrt[n]{4^n}} = \frac{\overset{\nearrow 1}{\sqrt[n]{2}}\ \overset{\nearrow 5}{\sqrt[n]{5^n}}}{\underset{\searrow 4}{\sqrt[n]{4^n}}} \longrightarrow \frac{5}{4}$$

f) $f_n = \dfrac{3n^5 + n^2 - n}{n^3 + 3} \ge$

rendőrelv (spec.), mivel a száml. n^5 a domináns a nevezőben n^3 és $n^5 \gg n^3$.

$$n^3 + 3 \le 5\cdot n^3 \quad \& \quad 3n^5 + n^2 - n \ge 3n^5$$

$$f_n \ge \frac{3n^5}{5n^3} = \frac{3}{5}n^2 \longrightarrow \infty$$

5. FELADAT

a) A megjegyzésből köv., hogy

a) $a_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n \longrightarrow e^a \quad \Rightarrow \quad \left(1 + 9/n\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^9$

b) $b_n = \left(1 + 7/n\right)^{cn+d} = \underbrace{\left(1 + \frac{7}{n}\right)^{c\cdot n}}_{s_n} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{7}{n}\right)^{d}}_{t_n}$

$t_n \longrightarrow 1$

$s_n = \left[\left(1 + \frac{7}{n}\right)^n\right]^c$ a) feladatból $\left(1 + b/n\right)^n \to e^b$, tehát

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \left(e^7\right)^c$, itt $c = 3$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + 7/n\right)^{3n+8} = e^{21}$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{2n+7} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3-2}{n+3}\right)^{2n+7} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-2}{n+3}\right)^{2n+7} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1 + \frac{-2}{n+3}\right)^{n+3}\right)^2\cdot\left(1 + \frac{-2}{n+3}\right) =$$

$2n+7 = 2\cdot(n+3) + 1$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-2}{n+3}\right)^{n+3}\right]^2 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-2}{n+3}\right) = \left(e^{-2}\right)^2 \cdot 1 = e^{-4}$$

d) $d_n = \left(\frac{3n+4}{3n+8}\right)^{9n+7} = \left(\frac{3n+8-4}{3n+8}\right)^{9n+7} = \left(1-\frac{4}{3n+8}\right)^{9n+7} =$

$$= \left(1+\frac{-4}{3n+8}\right)^{9n+7} = \left(1+\frac{-4\cdot 3}{9n+24}\right)^{9n+24-17} =$$

$$= \left(1+\frac{-12}{\delta n}\right)^{\delta n}\underbrace{\left(1+\frac{-12}{\delta n}\right)^{-17}}_{\downarrow\ 1} \to e^{-12}$$

6. FELADAT

a) $$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-n}\right)} =$$

$$= \frac{n^2+3n-(n^2+n)}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-n}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-n}} = \frac{n}{n}\cdot\underbrace{\frac{2}{\sqrt{1+3/n}+\sqrt{1-1/n}}}_{\downarrow n\to\infty\ \ 1}$$

b) $$b_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+5n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+5n+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+5n+1}+n} = \frac{n^2+5n+1-n^2}{n\left(\sqrt{1+5/n+1/n^2}+1\right)} =$$

$$= \frac{5+1/n}{\left(\sqrt{1+5/n+1/n^2}+1\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{5}{2}$$

7. FELADAT

a) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \frac{4+8-5}{3} = \frac{7}{3}$$

b) $$\lim_{x\to 1} \frac{\overset{\to 0}{x^2+4x-5}}{\underset{\to 0}{x^2-1}} = \bigstar$$, hupsz!

$1\downarrow$ >0 >0 $\uparrow 1$ <0 <0

• $x^2+4x-5 = (x-a)(x-b) = (x-1)(x+5)$: $\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2} = 1,\ -5$

• $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$$* = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+5)}{(x+1)} = 3$$

c) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)} \frac{(x^{p-1} + \dots + 1)}{(x^{q-1} + \dots + 1)} = p/q \quad (\because)$$

$$x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1} + \dots + 1)$$ (Polinomosztásból szép lehet fejteni)

$$x^q - 1 = (x-1)(x^{q-1} + \dots + 1)$$

7.5.

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

d) $$\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6} = \lim_{x\to 6} \frac{x-2-4}{(\sqrt{x-2}+2)(x-6)} =$$

$$= \lim_{x\to 6} \frac{1}{(\sqrt{x-2}+2)} = 1/4$$

e) $$\lim_{x\to 0} \frac{tg(x) - \sin(x)}{\sin^3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(x)\cdot\cos(x)}{\cos(x)\sin^3(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)(1+\cos(x))(1-\cos^2(x))} = 1/2$$

f) $$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))^2}{\frac{\sin^2(x) - \sin^2(x)\cdot\cos^2(x)}{\cos^2(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))^2\cos^2(x)}{\sin^2(x)\underbrace{(1-\cos^2(x))}_{(1-\cos x)(1+\cos x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)}{(1+\cos(x))^2} = 1/4$$

g) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2\cdot(1+\cos(x))} = 1/2$$

h) $$\lim_{x\to\infty} x \sin(\pi/x) \overset{y=1/x}{=} \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\cdot\sin(y\cdot\pi) \overset{z=\pi y}{=} \lim_{z\to 0} \frac{\pi}{z}\cdot\sin(z)$$

$$\pi$$