7. FELADAT

Ha kell, egyszerűsítsünk le x valamely hatványával, hogy megkapjuk a h.é.-t.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1} = ?$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1} = ?$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^p-1}{x^q-1} = ?$ $p,q \in \mathbb{N}^+$

7,5. FELADAT

Azonosságot használva:

d) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg(x)-\sin(x)}{\sin^3(x)}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos(x))^2}{tg^2(x)-\sin^2(x)}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

JOBB & BAL H.É.

def.

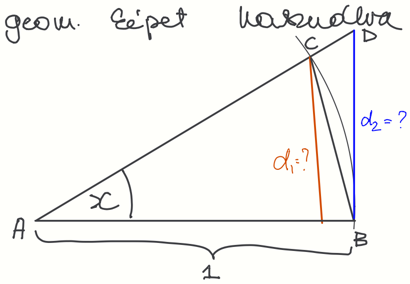
• Az $f(x)$ fgv. JOBBoldali határértéke x_0-ban az A szám, ha $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta$, hogy $\forall x_0 < x < x_0+\delta$; akkor $|f(x)-A|<\varepsilon$.

• Az $f(x)$ fgv. BALoldali határértéke x_0-ban a B szám, ha $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta$ hogy $\forall x_0-\delta < x < x_0$, akkor $|f(x)-B|<\varepsilon$.

Jelölés JOBB: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$

BAL: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$

★-os feladat: lássuk be, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ az alábbi geom. képet használva



$T(\Delta ABC)=?$ $T(◁ ABC)=?$ $T(\Delta ABD)=?$

8. FELADAT

Hat. meg a jobb & baloldali határértékeket az $x_0=1$ pontban.

a) $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & x\le 1 \\ 3x-5, & x>1 \end{cases}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

FGV-EK FOLYTONOSSÁGA

def. $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, ha f értelmezve van x_0 pontban és $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

• Ha f folytonos x_0 egy környezetében, de x_0-ban nem, akkor f-nek x_0-ban szakadása van.

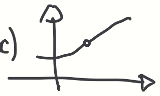
Típusok:

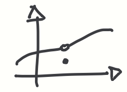
ELSŐFAJÚ
jobb & bal lim $\exists$ és véges

$\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$
∞ ∞

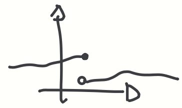
MÁSODFAJÚ
($\neg$ELSŐFAJÚ)

① MEGSZÜNTETHETŐ $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$

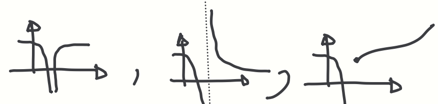




② UGRÁS $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$



③ VÉGTELEN
$\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ & $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ de valamelyik $\pm\infty$



④ LÉNYEGES
valamelyik limesz nem létezik

9. FELADAT
Hol folytonos? Hol milyen szakadása van?

a) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$ a+ε) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{|x+3|}$ b) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2(x-3)^2}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+7}$ d) $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}$

10. FELADAT
Tegyük folytonossá a param. jó megválasztásával.

a) $f(x) = \begin{cases} x\cdot\sin(1/x) & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x, & |x|\leq 1 \\ x^2+ax+b, & 1<|x| \end{cases}$

Differenciálszámítás

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diffható x_0-ban, ha $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ és véges is, ekkor

$$f'(x_0) = \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{**} = \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}}_{*}$$

11. FELADAT
Számoljuk ki $*$ alapján $x_0=3$-ban

a) $f(x)=4x+2$ b) $f(x)=2x^2$ c) $f(x)=\sin(x)$

11,5. FELADAT
Számoljuk ki $**$ segítségével $x_0=x_0$-ban:

a) $f(x)=x^3$ b) $f(x)=\sin(x)$

12 FELADAT
Adjunk példát az alábbiakra:

a) f mindenütt folyt. & nem diffható $x_0=1$ pontban
b) f mindenütt diffható & nem folyt az $x_0=1$ pontban
c) f diffható & a derivált
i) nem folyt 0-ban (Hint: $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$)
ii) nem diffható 0-ban, de folytonos

$$\boxed{(x^k)' = k\cdot x^{k-1} \text{ ha } k\in\mathbb{Q}, \quad (c\cdot f)' = c\cdot f', \quad (f\pm g)' = f'\pm g'}$$

13. FELADAT

a) $(4x^2+5x)' = ?$ b) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = ?$ c) $\left(\frac{9x^2+27x}{\sqrt[3]{x}}\right)' = ?$

$$\boxed{\begin{aligned}&(\sin(x))' = \cos(x),\ (\cos(x))' = -\sin(x),\ (c^x)' = c^x \ln(c),\\ &(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x),\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}}$$

13. FELADAT

a) $(5x\cdot\sin(x))' = ?$ b) $(\operatorname{tg}(x))' = ?$ c) $((x^3+1)\cos(x))' = ?$ d) $(2^x\cdot\cos(x)\cdot 3x^6)' = ?$

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

14. FELADAT Mely fgv-ek összetételéből származnak?

$f'(x) = ?$, ha $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diffható fgv.

a) $f(x) = e^{4x^2+2}$ b) $f(x) = (3x^8+9x^2)^{11}$ c) $f(x) = g(\sin^2(x))$

15. feladat

tfh $f(x) > 0$ mindenhol diffható és $g(x)$ mindenütt diffható.

a) $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = ?$ b) $\left((x^2)^{\sin(x)}\right)' = ?$

15. FELADAT Hol folytonos, hol diffható?

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2+x+2, & \text{ha } x<2 \\ 9x-6, & \text{ha } x\geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} (x-1), & x<1 \\ (x-1)^2, & x\geq 1 \end{cases}$

15+ε Mely param vál. esetén folytonos? Diffható?

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+c & x<x_0 \\ dx+e & x\geq x_0 \end{cases}$$

16. FELADAT L'Hôpital-szabály

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2+3x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^{2x}-1} - \frac{1}{2x}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)$

Szakadások típusai

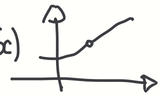
Típusok:

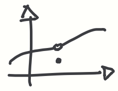
ELSŐFAJÚ
jobb és bal lim $\exists$ és véges

$\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$
$\neq\infty$ $\neq\infty$

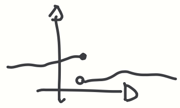
MÁSODFAJÚ
($\neg$ELSŐFAJÚ)

1. MEGSZÜNTETHETŐ $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

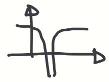
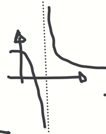
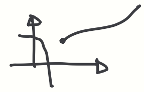




2. UGRÁS $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$



3. VÉGTELEN
$\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ és $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ de valamelyik $\pm\infty$

, , 

4. LÉNYEGES
valamelyik limesz nem létezik

Elsőfajú

Megszüntethető

x_0-ban pl.

$$\frac{p(x)\cdot f(x)}{p(x)}, \text{ ha } p(x_0)=0$$

Ugrás

MEGOLDÁSOK

1. FELADAT

A számlálóban & a nevezőben is polinom van, a nevező x^2-1 nem 0 a 2 közelében, ezért a határérték a behelyettesítési érték.

a) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}=\frac{2^2+4\cdot 2-5}{2^2-1}=\boxed{7/3}$$

b) $$\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{x^2+4x-5}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0}}=\star$$

• $x^2+4x-5=(x-a)(x-b) = (x-1)(x+5)$: $\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\begin{cases}1\\-5\end{cases}$

• $x^2-1=(x-1)(x+1)$

Ha $x\neq 1$, akkor $\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x+5)}{(x+1)}$, a határérték def. alapján a 2 határérték megegyezik.

$$\star=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+5)}{(x+1)}=\boxed{3}$$

c) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^p-1}{x^q-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)}\frac{(x^{p-1}+\dots+1)}{(x^{q-1}+\dots+1)}=\boxed{\frac{p}{q}}$$ ☺

$x^p-1=(x-1)(x^{p-1}+\dots+1)$ (Polinomosztásból meg lehet fejteni)

$x^q-1=(x-1)(x^{q-1}+\dots+1)$

7.5.

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

d) $$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{x-2-4}{(\sqrt{x-2}+2)(x-6)}=\lim_{x\to 6}\frac{1}{(\sqrt{x-2}+2)}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

e) $$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)-\sin(x)}{\sin^3(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(x)\cdot\cos(x)}{\cos(x)\sin^3(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)(1+\cos(x))(1-\cos^2(x))}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

f) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))^2}{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}-\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))^2\cos^2(x)}{\sin^2(x)\,\underbrace{(1-\cos^2(x))}_{(1-\cos x)(1+\cos x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)}{(1+\cos(x))^2}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

g) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2\cdot(1+\cos(x))}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

h) $$\lim_{x\to\infty}x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\overset{y=1/x}{=}\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\sin(y\cdot\pi)\overset{z=\pi y}{=}\lim_{z\to 0}\frac{\pi}{z}\cdot\sin(z)=\boxed{\pi}$$

8. FELADAT

a) $f(x)=\begin{cases}-2x+3, & x\le 1\\ 3x-5, & x>1\end{cases}$

BAL:

ha $x<1$ $f(x)=-2x+3$ behelyettesítési érték

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} -2x+3 = \lim\limits_{x\to 1} -2x+3 = -2\cdot 1+3 = \boxed{1}$

JOBB

ha $x>1$ $f(x)=3x-5$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 3x-5 = \lim\limits_{x\to 1} 3x-5 = \boxed{-2}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ $|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x\ge 1\\ -(x-1), & \text{ha } x<1\end{cases}$, tehát $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=(x+1) & \text{ha } x>1\\ \dfrac{x^2-1}{-(x-1)}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}=-(x+1) & x<1\end{cases}$

BAL:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} -(x+1)=\boxed{-2}$

JOBB:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=\boxed{2}$

9. feladat

a) a folyt hányadosa, ott van gond,

ahol $x^2+5x+6=0=(x+2)(x+3)$

$$\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \begin{matrix}-2\\-3\end{matrix}$$

Folytonos $\mathbb{R}\setminus\{-2,-3\}$-on

szakadás típusa:

$f(x)=\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+2)}$, f(x) az $x_0=-3$ pont környezetében (kivéve $x_0=-3$-ban) megegyezik a $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ fgv-nyel, melynek a jobb és baloldali határértéke is a behelyettesítési érték az $x_0=-3$ pontban.

$x_0=-3$

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+2)} = \lim_{x\to -3}\frac{x-1}{x+2} = \frac{-4}{-1} = 4 \Rightarrow$$

∃ 2oldali h.é. ∃ & megegyezik

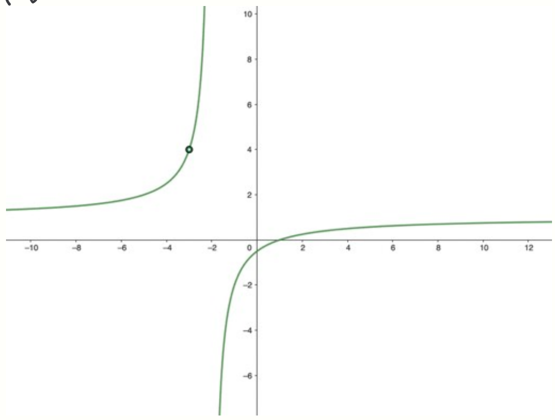
⇓

MEGSZÜNTETHETŐ

$x_0 = -2$ $f(x)$ a -2 kis környezetében egyező az

$g(x)=\frac{(x-1)}{(x+2)}$ fgv-nyel. Így kapjuk

$\lim\limits_{x\to -2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -2-0} \frac{(x-1)}{(x+2)}$,



$$\lim_{x\to -2-0}\frac{(x-1)}{(x+2)} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{(-2-\varepsilon-1)}{(-2-\varepsilon+2)} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{(-3-\varepsilon)}{-\varepsilon} =$$

$x = -2-\varepsilon$

miivel $-3<0$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{-3}{-\varepsilon} + \underbrace{\frac{-\varepsilon}{-\varepsilon}}_{=1} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{-3}{-\varepsilon} = \infty$$

$-\varepsilon \uparrow 0$

Hasonlóan:

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{(x-1)}{(x+2)} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{(-2+\varepsilon-1)}{(-2-\varepsilon+2)} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{(-3+\varepsilon)}{-\varepsilon} =$$

$x = -2-\varepsilon$

miivel $-3<0$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{-3}{+\varepsilon} + \underbrace{\frac{+\varepsilon}{+\varepsilon}}_{=1} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{-3}{+\varepsilon} = -\infty$$

$\varepsilon \downarrow 0$

MÁSODFAJÚ (VÉGTELEN)

2+ε) hasonló probléma, mint az előbb, ha $x_0=-3$.

$x+3>0 \iff x>-3 \iff \frac{x+3}{|x+3|} = 1$

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{|x+3|} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x>-3 \\ 1-x, & \text{ha } x<-3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -3-} f(x) = \lim_{x\to -3-} 1-x = 4$$

$$\lim_{x\to -3+} f(x) = \lim_{x\to -3+} x-1 = -4$$

UGRÁS (elsőfajú)

b) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2(x-3)^2} \longrightarrow$ probléma: $x_0=0$, $x_1=3$ folyt $\mathbb{R}-\{0,3\}$-on.

A szakadások típusai:

$$f(x)=\frac{(x-3)(x+3)}{x^2(x-3)^2}=\frac{x+3}{x^2(x-3)}$$

$\boxed{x_0=0}$

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\overset{x\to 0}{\underset{\to 3}{x+3}}}{\underset{\substack{\vee \\ 0}}{\underbrace{x^2}_{\to 0+}}\,\underbrace{(x-3)}_{x\to 0:\ \to -3}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\overset{x\to 0}{\underset{\to 3}{x+3}}}{\underset{\substack{\vee \\ 0}}{\underbrace{x^2}_{\to 0+}}\,\underbrace{(x-3)}_{x\to 0:\ \to -3}}=-\infty$$

összefoglalva:

$\lim_{x\to 0} x+3=3$

$\lim_{x\to 0}(x-3)=-3$

& $x^2>0$

→ MÁSODFAJÚ (VÉGTELEN)

$\boxed{x_0=3}$

$\lim_{x\to 3} x+3=6$, $\lim_{x\to 3} x^2=9$ **DE** $\lim_{x\to 3+} x-3=0+$, mert

$\lim_{x\to 3+} x-3=\lim_{\varepsilon\to 0+} 3+\varepsilon-3=\lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon=0+$

VISZONT $\lim_{x\to 3-} x-3=0-$

$\lim_{x\to 3-} x-3=\lim_{\varepsilon\to 0+} 3-\varepsilon-3=\lim_{\varepsilon\to 0+}-\varepsilon = 0-$

→ MÁSODFAJÚ (VÉGTELEN)

Tehát:

$0<6$

$$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3-}\frac{x+3}{\underbrace{x^2}_{\to 9>0}\underbrace{(x-3)}_{\to 0-}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3-}\frac{\overbrace{x+3}^{\to 6>0}}{\underbrace{x^2}_{\to 9>0}\underbrace{(x-3)}_{\to 0+}}=+\infty$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5x+7}$ mindenhol folyt, mert x^2+5x+7-nek nincsenek valós gyökei.

d) $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}$ $\cos(x) = 1 \iff 2k\pi = x \Rightarrow$ szakad $x = 2k\pi$-ben

$\lim\limits_{x\to 2k\pi} \dfrac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)} \cdot (1+\cos(x)) = 2$, Megszüntethető

10. FELADAT

a)
$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x), & x \neq 0 \\ a, \text{ ha } & x = 0 \end{cases}$$

$f(x) = x$ és $g(x) = \sin(1/x)$ folytonos, ha $x \neq 0$, ezért csak azt kell megvizsgálni, hogy 0-ban mi a helyzet és mit tehetünk.
A fgv folytonos lehet, ha $x = 0$-ban az $x \cdot \sin(1/x)$-nek megszüntethető szakadása van, ekkor az $x \cdot \sin(1/x)$ 0-beli határértéke kell, hogy $a = f(0)$ legyen.

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$, mivel $\sin(1/x)$ korlátos és $x \to 0$,

tehát a szakadás megszüntethető és $a = 0$ jó választás.

b) $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1 \\ x^2 + ax + b, & 1 < |x| \end{cases}$

hasonlóan az előzőhöz: $x = 1$ és $x = -1$-ben kell megvizsgálni: Folytonos, ha

A.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1-} f(x) &= \lim_{x \to 1} x^2 + ax + b \\ &\shortparallel \\ \lim_{x \to 1+} f(x) &= \lim_{x \to 1} x = 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \lim_{x \to 1} x^2 + ax + b \\ \shortparallel \\ 1 \end{aligned}$$

ÉS

B.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -1+} f(x) &= \lim_{x \to -1} x^2 + ax + b \\ &\shortparallel \\ \lim_{x \to -1-} f(x) &= \lim_{x \to -1} x = -1 \end{aligned}\right\} \quad \lim_{x \to -1} x^2 + ax + b = -1$$

A. $\lim_{x \to 1} x^2 + ax + b =$

$= 1 + a \cdot 1 + b = 1,$

ha

$1 + a + b = 1$

$\Leftrightarrow a + b = 0$

$\Leftrightarrow a = -b$

B. $\lim_{x \to -1} x^2 + ax + b =$

$= 1 - a \cdot 1 + b = 1,$

$1 - a + b = -1$

$\Leftrightarrow b - a = -2$

$\Leftrightarrow b + b = -2 \Rightarrow b = -1$

$a = 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1 \\ x^2 + x - 1, & 1 < |x| \end{cases}$

11. FELADAT

a) $x_0 = 3$, $f(x) = 4x+2$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{4(3+t)+2-(4\cdot 3+2)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{12+4t+2-12-2}{t} = \lim_{t\to 0} 4\,{}^{t}/_{t} = 4$$

b)

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2(x_0+t)^2-2x_0^2}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{4x_0t+2t^2}{t} = 4x_0 = 12$$

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cdot\cos(a)$

c)

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(x_0+t)-\sin(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(t)+\sin(t)\cdot\cos(x_0)-\sin(x_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \underset{\substack{\parallel \\ \cos(x_0)}}{\frac{\sin(t)}{t}\cdot\cos(x_0)} + \underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin(x_0)(\cos(t)-1)}{t}}_{\frac{\sin(x_0)\sin(t)}{\cos(t)+1}\cdot\frac{\sin(t)}{t}} = \cos(3)$$

$$\sin(t) \to 0, \qquad \frac{\sin(t)}{t} \to 1$$

12. FELADAT

a) $f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x \geq 1 \\ 1-x, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$

Pl.

folytonosság:

csak az $x=1$-ben merül fel kérdés:

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = 0$$

diffhatóság, szintén csak $x=1$-ben bizonytalan

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(1+t)-f(1)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{1+t-1-0}{t} = 1$$

$$\lim_{t\to 0-} \frac{f(1+t)-f(1)}{t} = \lim_{t\to 0-} \frac{1-(1+t)-0}{t} = -1$$

b) Nincs ilyen

c) i) ellenőrizzük:

13. FELADAT

13. FELADAT

a) $(4x^2+5x)' = 4\cdot 2\cdot x + 5$

b) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-1/2}\right)' = -1/2 \cdot x^{-3/2} \left(= -1/2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)$

c) $\left(\frac{9x^2+27x}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(9\cdot x^{2-1/3} + 27\, x^{1-1/3}\right)' = \left(9x^{5/3} + 27x^{2/3}\right)' =$

$= 9\cdot 5/3\, x^{2/3} + 27\cdot 2/3 \cdot x^{-1/3} \left(= 15x^{2/3} + 18x^{-1/3}\right)$

13. FELADAT

a) $(5x \cdot \sin(x))' = (5x)' \sin(x) + 5x \cdot \sin'(x) = 5 \cdot \sin(x) + 5x \cdot \cos(x)$

b) $(tg(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin'(x) \cdot \cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} =$

$= \frac{1}{\cos^2(x)}$

c) $((x^3+1)\cos(x))' = (x^3+1)' \cdot \cos(x) + (x^3+1)\cos'(x) = 3x^2\cos(x) +$
$- (x^3+1)\sin(x)$

d) $(2^x \cdot \cos(x) \cdot 3x^6)' = (2^x \cos(x))' \cdot 3x^6 + (2^x \cos(x)) \cdot (3x^6)' =$

$\left[(2^x \cos(x))' = (2^x)' \cos(x) + 2^x \cos'(x) = 2^x [\ln(2)\cos(x) - \sin(x)] \right]$

$= 2^x [\ln(2)\cos(x) - \sin(x)] \, 3x^6 + 2^x \cos(x) \cdot 18x^5$

14. FELADAT

$e^{4x^2+2} \cdot 8x$

a) $f(x) = e^{4x^2+2}$, $f(x) = g(h(e(x)))$

$g(x) = e^x$, $h(x) = 4x+2$, $e(x) = x^2$

$f'(x) = g'(h(e(x))) \cdot h'(e(x)) \cdot e'(x) =$

$e^{4x^2+2} \cdot 4 \cdot (2 \cdot x) = e^{4x^2+2} \cdot 8x$

b) $f(x) = (3x^8 + 9x^2)^{11}$

$f(x) = g(h(e(x)))$, $g(x) = x^{11}$,

$h(e(x)) = 3x^8 + 9x^2 \Leftarrow h(x) = 3x^4 + 9x$
$e(x) = x^2$

$$f'(x) = g'(h(e(x))) \cdot h'(e(x)) \cdot e'(x) =$$
$$= 11 \cdot (3x^8 + 9x^2)^{10} \cdot (12(x^2)^3 + 9) \cdot 2x$$

c) $f(x) = g(\sin^2(x))$

$$f(x) = g(h(e(x)))$$
$$h(x) = x^2$$
$$e(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = g'(\sin^2(x)) \cdot \underbrace{2 \cdot \sin(x)}_{h'(e(x))} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{e'(x)}$$

15. feladat Tfh $f(x) > 0$ mindenhol diffható és $g(x)$ mindenütt diffható.

a) $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = ?$ b) $\left((x^2)^{\sin(x)}\right)' = ?$

a) $$f(x)^{g(x)} = e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)} =$$
$$= e^{g(x) \cdot \log f(x)}$$

tehát

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x) \cdot \log f(x)}\right)' =$$
$$= e^{g(x) \cdot \log f(x)} \cdot \left(g(x) \log f(x)\right)' = *$$

$$(g(x)\cdot \log f(x))' =$$

$$g'(x)\cdot \log f(x) + g(x)\cdot \underbrace{\frac{f(x)}{f'(x)}}_{(\log f(x))'}$$

$$* = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x)\cdot \log f(x) + g(x)\cdot \frac{f(x)}{f'(x)} \right]$$

b) $\left((x^2)^{\sin(x)}\right)' = ?$

második módszerrel

$$\left(\log\left((x^2)^{\sin(x)}\right)\right)' = \frac{\left[(x^2)^{\sin(x)}\right]'}{(x^2)^{\sin(x)}}$$

$$\parallel$$

$$(\sin(x)\cdot \log(x^2))' = \sin'(x)\cdot \log(x^2) + \sin(x)\cdot \frac{1}{x^2}\cdot 2x$$

tehát átszorzás után

$$\left((x^2)^{\sin(x)}\right)' = (x^2)^{\sin(x)} \left[\sin'(x)\cdot \log(x^2) + \sin(x)\cdot \frac{1}{x^2}\cdot 2x\right]$$

15. FELADAT Hol folytonos, hol diffható?

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2+x+2, & \text{ha } x<2 \\ 9x-6, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} (x-1), & x<1 \\ (x-1)^2, & x \geq 1 \end{cases}$

a) $2x^2+x+2$ és $9x-6$ folytonos és diffható, tehát csak az $x=2$ pontbeli folytonosságot & diffhatóságot kell ellenőrizni.

diffható, ha

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(2+t)-f(2)}{t}$$ létezik és egyértelmű.

ha t felülről tart a 0-ba:

$$(9x-6)'\Big|_{x=2} = \lim_{t \to 0+} \frac{f(2+t)-f(2)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{18+9t-6+18-6}{t}$$

$$\overset{\shortparallel}{9} \qquad\qquad \overset{\shortparallel}{9}$$

ha t alulról

$$\lim_{t \to 0-} \frac{f(2+t)-f(2)}{t} = \lim_{t \to 0-} \frac{2(2+t)^2+2+t+2-(9 \cdot 2-6)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2(4+4t+t^2)+4+t-12}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{8+4-12}{t} + \frac{9t}{t} + \frac{t^{\cancel{2}}}{\cancel{t}} = 9$$ ✓

diffható → folytonos.

$$g(x)=\begin{cases}(x-1), & x<1\\ (x-1)^2, & x\geq 1\end{cases}$$

diffható?

$$\lim_{t\to 0-}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}=\lim_{t\to 0-}\frac{1+t-1-0}{t}=1$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2-0}{t}=0$$

nem diffható!

Folyt?

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)^2=0$$

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)=0 \quad \checkmark \quad \text{folyt!}$$

15+ε Mely param val. esetén folytonos? Diffható?

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c & x<x_0\\ dx+e & x\geq x_0\end{cases}$$

16. FELADAT L'Hôpital-szabály

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ $\frac{0}{0}$ alakú, L'H

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{1}=3$$

Más módszer:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x^2+x+1=3$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2+3x^3}$

$\frac{0}{0}$ $L'H$ $\qquad$ $\frac{0}{0}$, $L'H$ megint

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2+3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}\cdot 1 - 1}{2x+9x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\left(\frac{1}{1+x}\right)^2}{2+18x} = -\frac{1}{2}$$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{2x}-1} - \frac{1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-(e^{2x}-1)}{(e^{2x}-1)(2x)} =$

$\infty - \infty$

$\frac{0}{0}$ $\qquad$ $\to 0$

$e^{2x}(4x-1)+2$

$\to 0$

$e^{2x}\cdot 2\cdot 2x + (e^{2x}-1)\cdot 2 = 2\left(e^{2x}\cdot 2x + e^{2x}+1\right)$

4

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2-e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}\cdot 2\cdot 2x+(e^{2x}-1)\cdot 2} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^{2x}\cdot 4}{2\left(e^{2x}\cdot 2\cdot 2x + e^{2x}\cdot 2 + e^{2x}\cdot 2\right)} =$$

$\to 0$ $\qquad$ $\to 0$ $\qquad$ $\to 4$

$0 \qquad 2 \qquad 2$

$= -\frac{1}{2}$

d) $\lim_{x\to\infty} x\,(e^{1/x}-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1/x^2}{e^{1/x}\cdot -1/x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{-1/x}$

$x \to \infty$, $(e^{1/x}-1) \to 0$ $\qquad$ $\frac{0}{0}$ $\qquad$ $= 1$